第44卷 第7期 2020年4月10日
DOI：10.7500/AEPS20190301001
电力系统自动化
Automation of Electric Power Systems
Vol. 44 No. 7 Apr. 10，2020

# 基于渐近数值法的静态电压稳定域边界高阶拟合方法

冯卓诚，万凯遥，姜 彤
（新能源电力系统国家重点实验室，华北电力大学，北京市 102206）

**摘要：**为实现静态电压稳定边界的快速准确计算，提出了一种基于渐近数值方法拟合静态电压稳定边界的算法。算法对电压崩溃点处的方程组进行分析，得到了静态电压稳定边界高阶偏导数的通式。基于渐近数值方法，分析了拟合误差与边界范围的关系。所提方法一方面避免了传统方法的多次潮流计算，耗时降低且有更高的精度；另一方面，计算高阶偏导数时可复用已有系数矩阵的因子表，计算量小。最后，给出了基于算法的相关应用，并将IEEE 118节点系统作为算例，验证了本算法的有效性。

**关键词：**静态电压稳定域；鞍结分岔点；渐近数值方法；崩溃点法

## 0 引言

可再生能源的时空分布具有强烈的波动性与间歇性，大规模的可再生能源并网影响了系统的电能质量和可靠性，为新时代背景下电网的稳定运行埋下了难以预测的隐患[1-8]。加之各地负荷需求增大，运行点靠近稳定边界，系统运行的稳定性需要重视。因此，分析系统的静态电压安全稳定问题具有十分重要的意义。

静态电压稳定性的研究方法有最大功率传输法、灵敏度分析法、连续潮流法和直接法等。这类方法已广泛应用于电力系统，但由于新能源的波动性与间歇性，单一负荷增长方向的裕度信息不足以满足要求[9]。在此基础上，以域为核心的研究方法应运而生。

文献[10]定义了静态安全域（static security region，SSR）的概念，它将其定义为多维注入功率空间内由一个多维曲面包络的区域。静态电压稳定域（static voltage stability region，SVSR）由此衍生而来，它是由电压稳定性约束形成的静态稳定域的子集。探寻快速、准确的SVSR构建方法，有助于对系统的运行稳定性提出整体评价。采用连续潮流或者直接法遍历所有负荷增长方向的方法称为逐点法，该方法能够精确计算SVSR边界，但计算量过大。文献[11]利用SVSR边界的拓扑特性，以预测-校正的搜索算法为核心，构造了SVSR边界的快速求解模型，在保证收敛性和计算精度的同时，耗时较逐点法更短，但计算涉及多次牛顿迭代过程，仍存在计算量大的问题。

将SVSR解析化是SVSR快速计算的突破口。但非线性系统的全解析化难以实现，因此，采用幂级数方式对SVSR全解析式进行拟合成是目前快速计算SVSR的主要方法。文献[12]利用伽辽金法求出了SVSR边界的高阶表达式，并做了详细的误差分析。当误差要求精度更高，参数数目增加时，算法所需时间增加过多，计算代价高昂，且存在收敛性问题，增加了应用难度。文献[13]通过最小二乘拟合得到了SVSR边界近似的二次展开式，该方法能够实现一定范围内的SVSR边界近似，但公式推导复杂，初值点只能在靠近SVSR边界处选择，且只给出了功率注入空间的拟合信息。文献[14-15]利用隐函数求导原理分别推导出了SVSR边界的一阶与二阶近似表达式，计算速度快，局部精度高，但作为渐近数值法的应用，并未给出SVSR边界高阶近似的通式，也没有在全局范围内对近似结果做误差分析，不能保证全局拟合的精度。为了兼顾精度与计算速度，需要对边界的非线性特征进行更深入的研究。

基于上述研究取得的进展，本文采用渐近数值方法[16]，得到了SVSR边界关于注入变量多阶偏导数的通式，实现了SVSR边界在功率注入空间及状态变量空间的严格高次近似，并给出了误差与近似阶数的数学表达。本方法不仅信息识别面积大，精度高，且计算过程简洁，运算量小。最后，根据IEEE 118节点系统做了算例分析，针对发电机节点与负荷节点，分别构建了二维、三维SVSR边界，与逐点法进行了对比，验证了本方法的快速性和有效性。

收稿日期：2019-03-01；修回日期：2019-07-17。
上网日期：2019-11-30。

## 1　SVSR边界的高阶拟合

### 1.1　SVSR定义

电压稳定域的研究方向包括SVSR、小扰动电压稳定域和暂态电压稳定域。关于SVSR，研究中通常将系统鞍结分岔点（SNB）组成的多维曲面作为静态电压稳定的实用边界。本文的研究对象也是由SNB构成的多维静态电压稳定边界。

系统运行于SNB时，潮流计算雅可比矩阵奇异。此时系统的状态可由以下方程组表达：

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0 \\ \boldsymbol{f}_x\boldsymbol{v}=0 \\ \|\boldsymbol{v}\|_1=1 \end{cases} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{f}(\cdot)$：$\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m\rightarrow\mathrm{R}^n$为系统潮流方程；$\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n$为状态变量，采用直角坐标计算时为$PQ$节点和$PV$节点电压向量的实部和虚部；$\boldsymbol{u}\in\mathrm{R}^m$为注入参数变量，包括$PQ$节点有功及无功负荷、$PV$节点有功负荷量；$\boldsymbol{f}_x\boldsymbol{v}=0$为系统处于SNB时的特征方程；$\boldsymbol{f}_x=\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})/\partial\boldsymbol{x}$为$n$阶雅可比矩阵；$\boldsymbol{v}$为雅可比矩阵的右特征向量；$\|\cdot\|_1$为一范数运算。

考虑由SNB构成的SVSR边界，定义在注入变量空间内的多维曲面$S_m$，有$\{S_m=\boldsymbol{u}|\exists\boldsymbol{x},\text{s.t. }\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0,\boldsymbol{f}_x\boldsymbol{v}=0,\|\boldsymbol{v}\|_1=1\}$。

传统的SVSR边界构建方法计算量庞大，计算代价高昂。且SNB处系统的特征方程组具有强烈的非线性特性，SVSR的边界解析式也很难得到。基于魏尔斯特拉斯定理，闭区间上任意连续函数都可用多项式一致逼近，这为近似法构建SVSR边界提供了理论依据。另一方面，边界光滑的性质也为运用渐近数值法提供了前提条件。因此，本文采用渐近数值法来求解SVSR边界的高阶近似表达式。

本文利用渐近数值方法（asymptotic numerical method，ANM），推导出了SVSR边界的高阶近似表达式的通式，并给出了注入空间及状态变量空间的全变量拟合信息。

### 1.2　渐近数值方法

渐近数值方法是一种针对非线性问题的高精度拟合方法[16-17]。它的核心思想是将闭区间上的解曲线用幂级数表达，并延拓至曲线全部，就得到了解曲线在全局域上满足精度要求的表达式。该方法具有计算速度快、步长控制自适应的优点，已广泛应用于求解各领域非线性问题[18-20]。

从数值角度对渐近数值方法结果进行误差分析，对近似多项式$u_N=u_{(0)}+au_{(1)}+\cdots+a^Nu_{(N)}$，Cochelin定义了误差式$\varepsilon$[16]：

$$\frac{\|u_{(N)}-u_{(N-1)}\|}{\|u_{(N)}-u_{(0)}\|}=\frac{a^Nu_{(N)}}{au_{(1)}+a^2u_{(2)}+\cdots+a^Nu_{(N)}}\leqslant\varepsilon \tag{2}$$

近似可得：

$$a_{\max}=\left(\frac{\varepsilon\|u_{(1)}\|}{\|u_{(N)}\|}\right)^{\frac{1}{N-1}} \tag{3}$$

式（2）结果显示了在精度为$\varepsilon$、展开阶数为$N$时的闭区间半径。式（3）的定义给出了拟合结果在满足精度要求前提下的大致范围。

### 1.3　SVSR边界高阶表达式的推导及构建

根据隐函数定理，SVSR边界的表达式可写成：$u_i=\boldsymbol{u}(u_1,u_2,\cdots,u_{i-1},u_{i+1},\cdots,u_m)(i=1,2,\cdots,m)$，考虑SNB的特征方程式（1），两边对$u_k(k=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$求导，由链式法则可得：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_x & \boldsymbol{f}_{u_i} & 0 \\ \boldsymbol{f}_{xx}\boldsymbol{v} & 0 & \boldsymbol{f}_x \\ 0 & 0 & \boldsymbol{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_k} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial u_k} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial u_k} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{f}_{u_k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{l}$为特征向量规范化的常系数矩阵；$\boldsymbol{f}_{xx}=\partial\boldsymbol{f}_x/\partial\boldsymbol{x}$为雅可比矩阵对$\boldsymbol{x}$的三阶张量。

以式（4）为通式推导的基本格式，记式（4）为$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。通过该式即可得到SVSR边界的一阶切平面表达式[14]。考虑式（4）左右两端对状态变量求多阶导，则势必会出现$\boldsymbol{f}_{xxx}=\partial\boldsymbol{f}_{xx}/\partial\boldsymbol{x}$及阶数更高的张量。当采用直角坐标系计算时，雅可比矩阵的每个元素可视做状态变量的一次函数，因此，当求导次数高于二次时生成的张量等于零，达到了消元的效果。考虑式（2）等号左右两端对参数变量求导$p$次，右侧向量是常向量，任意阶导数为零，求导结果记为：

$$(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B})^p=0 \tag{5}$$

参考复合函数求导法则中的二项展开形式，将上式展开，得到：

$$(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B})^p=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=1}^{\mathrm{C}_p^k}\boldsymbol{A}_0^{k_j}\boldsymbol{B}^{p-k_j}=0 \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0^k=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{xx}\dfrac{\partial^k\boldsymbol{x}}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\cdots\partial u_{i_k}} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{f}_{xx}\dfrac{\partial^k\boldsymbol{v}}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\cdots\partial u_{i_k}} & 0 & \boldsymbol{f}_{xx}\dfrac{\partial^k\boldsymbol{x}}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\cdots\partial u_{i_k}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{p-k}=\left[\frac{\partial^{p-k}\boldsymbol{x}}{\partial u_{i_{k+1}}\partial u_{i_{k+2}}\ldots\partial u_{i_p}},\frac{\partial^{p-k}u_1}{\partial u_{i_{k+1}}\partial u_{i_{k+2}}\ldots\partial u_{i_p}},\frac{\partial^{p-k}\boldsymbol{v}}{\partial u_{i_{k+1}}\partial u_{i_{k+2}}\ldots\partial u_{i_p}}\right]^{\mathrm{T}}$$

式中：$k_j=k(j=1,2,\cdots,\mathrm{C}_p^k)$，并规定矩阵的零次导数为自身。下标的意义是为了区分从$p$个参数变量中选择$k$个求导，共有$\mathrm{C}_p^k$种选择，$p-\mathrm{C}_p^k$代表向量$\boldsymbol{B}$对剩下的$p-\mathrm{C}_p^k$个参数变量求导$p-k$次。

将调整后的展开式整理成式(4)的形式，有

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}^p=-\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{\mathrm{C}_p^k}\boldsymbol{A}_0^{k_j}\boldsymbol{B}^{p-k_j} \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{B}^p=\left[\frac{\partial^p\boldsymbol{x}}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\ldots\partial u_{i_p}},\frac{\partial^p u_1}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\ldots\partial u_{i_p}},\frac{\partial^p\boldsymbol{v}}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}\ldots\partial u_{i_p}}\right]^{\mathrm{T}}$$

即得到了注入功率空间含$p$阶偏导数的SVSR边界通式。由此得到了SVSR边界的高阶解析表达为：

$$\begin{aligned}u_i=&\boldsymbol{u}(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_{i-1}^0,u_{i+1}^0,\cdots,u_m^0)+\\&\sum_{j=2}^{m}\frac{\partial\boldsymbol{u}(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_{i-1}^0,u_{i+1}^0,\cdots,u_m^0)}{\partial u_j}(u_j-u_j^0)+\\&\frac{1}{2!}\sum_{j=2}^{m}\sum_{k=2}^{m}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_{i-1}^0,u_{i+1}^0,\cdots,u_m^0)}{\partial u_j\partial u_k}\cdot\\&(u_j-u_j^0)(u_k-u_k^0)+\cdots\end{aligned}$$

式中：上标0代表初始点。

分析式(7)发现，想要得到$n$阶偏导数，首先要算出所有相应的$1\sim n-1$阶导数，计算次数较多。但在网络拓扑结构不变的前提下矩阵$\boldsymbol{A}_0$保持不变，可以反复利用它的因子表进行前代回带求解，由推导过程可看出，偏导数的求解过程就是求解线性方程组的过程，计算过程不涉及迭代，数值稳定性好；矩阵$\boldsymbol{A}_0$是满秩矩阵，故保证有解。

得到要求的偏导数后，用渐近数值法构建SVSR边界，整体流程如下，流程图见附录A图A1。

步骤1：读入基态潮流信息，根据给定负荷增长方向计算得到SNB，将该点作为初始展开点。

步骤2：设定参数，参考本方法在电力系统领域的其他成果[18]，选择展开阶数$N$为8阶，精度$\varepsilon$为$10^{-5}$，求取对应阶数的偏导数。

步骤3：代入式(3)算得展开半径$a_{\max}$，在初始点作半径为$a_{\max}$的泰勒展开，之后判断两端是否全部到达坐标轴边界，是则结束计算，否则转入步骤4。

步骤4：取上次展开的终点作为下次展开的初始点，重复步骤2和3，直至边界构建完成。

### 1.4　SVSR超曲面拟合的应用价值

根据得到的偏导数，可以求取状态变量在边界上各点的解。更丰富的信息有助于调度员把握系统的稳定性，并依此做出更合理的调度方案。得到的状态变量空间信息也可转换为功率割集平面信息[14-15]。

得到SVSR高精度近似曲面后，基于文献[14-15]提出的指标，定义静态电压稳定指标$L_\lambda(\boldsymbol{u})$：

$$L_\lambda(\boldsymbol{u})=\frac{d_1}{d_2} \tag{8}$$

$$\begin{cases}d_1=\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{SNB},\lambda_0}-\boldsymbol{u}_0\right\|\\\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_0\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}d_2=\min(\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0\right\|)\\\text{s.t.}\ \ g(\boldsymbol{u})=0\end{cases} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{\lambda}$为表征负荷变化的向量，维数与$\boldsymbol{u}$相同；$d_1$为在当前负荷增长方向上，当前运行点与该方向对应SNB的距离；$d_2$为负荷增长方向任取时，当前运行点与SVSR边界距离的最小值；$\boldsymbol{u}_{\mathrm{SNB},\lambda_0}$为沿当前负荷增长方向到达SNB时的状态变量；$g(\boldsymbol{u})=0$对应SVSR边界的近似表达式；$\boldsymbol{u}_0$为当前运行点的状态变量，为已知条件。

该指标反映了系统在当前负荷增长方向下的稳定性，数值越大则稳定性越强。计算$d_1$只需要根据已知的负荷增长方向调用一次连续潮流(CPF)程序即可，计算$d_2$时可采用拉格朗日乘数法，将优化问题转化为非线性方程组的求解问题，值得注意的是，$d_2$由于采用了高精度的SVSR边界表达式，得以运用成熟的数学方法求解，与文献[14-15]提出的第3类电压稳定指标求解方法相比，收敛性更好，计算速度更快，更适于在线应用。

## 2　算例分析

基于IEEE 118节点系统，分别考虑了二维、三维SVSR边界的构建，验证了本算法的有效性，基于得到的SVSR边界表达式，计算得到了静态电压稳定指标，并进行了全局误差分析。计算涉及数据全部用标幺值表示，设定功率基准值为100 MVA，程序采用MATLAB软件编写。为说明本文所提方法对于多维SVSR边界构建的普适性，构建了不同维数的SVSR边界。

本方法同样可以构建四维乃至更高维的SVSR边界，但考虑到实际应用中高维边界不易可视化，实用性不强，因此，需要对边界降维，降至易可视化的二维和三维边界[9,13]。故算例分析只针对二维、三维边界的构建做了讨论。

### 2.1　二维注入功率空间

SVSR边界的几何特征与选取变量间的敏感程度相关[8]。以下2个算例分别代表了2种情形，以体现渐近数值方法的必要性与有效性。

选取节点20与节点7的有功功率为横、纵坐标轴，建立二维SVSR边界，如图1所示。

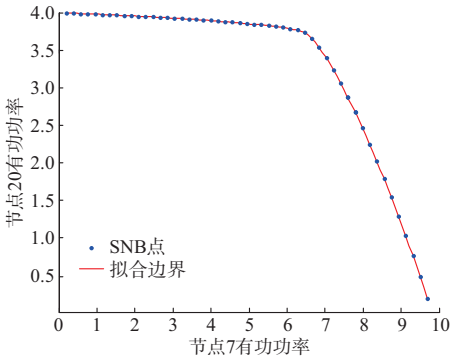


**图1　节点20与节点7的二维注入功率空间SVSR边界**
**Fig. 1　Two-dimensional SVSR boundary of injection power space based on node 20 and node 7**

由计算结果可知，该边界在(6.5，3.8)附近非线性特征强烈，曲线较为陡峭。经仿真验证，常用的一阶、二阶超平面拟合都难以在全局保证结果的准确性。因此，采用渐近数值法，步长控制精度为0.000 01，在每一段的起点用八阶展开，得到了准确的边界结果。

对由敏感变量构成的边界而言，渐近数值法依然可行。此时，需要先确定边界上一个SNB的位置，将该点作为计算的初始点，再利用公式计算边界在该点处的偏导数值，在该点进行初次展开。若计算得到的展开半径已可覆盖全部边界，由于精度参数ε的限制，计算所得的边界精确度满足要求，可停止计算。考虑泰勒展开方法本身的特性，应尽量将初始点选在边界中心处，以得到更好的全局拟合效果。在工程应用中，也可根据当前的负荷增长方向计算得到SNB作为初始点。在该功率注入空间中，即使系统的负荷增长方式未知，但其SVSR边界是唯一的，不同的增长方向只代表了运行点到达SVSR边界的不同路径，并不影响对该边界的求取。

针对负荷节点20，选择它的有功功率与无功功率为横、纵坐标，构建二维SVSR边界。为了拟合初始点坐标为(3.062 61，1.050 00)，结果见图2。$P_{20}$对$Q_{20}$求导的一阶导数为−1.082，二阶导数为−0.217，三阶导数为−0.007，四阶导数为−0.030，五阶导数为−0.0014。

对负荷节点的SVSR边界拟合结果进行误差分析，定义残差计算式为：

$$E=\left\|u-u^{*}\right\| \tag{11}$$

式中：$u$为本法得到的结果；$u^{*}$为直接法计算得到的精确结果。

根据式(11)计算各点残差，并根据式(3)计算半径，结果见表1和图3。

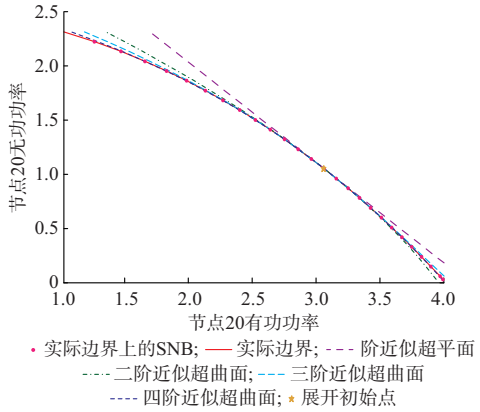


**图2　负荷节点20的二维注入功率空间SVSR边界**
**Fig. 2　Two-dimensional SVSR boundary of injection power space based on load node 20**

**表1　不同精度下的闭区间半径最大值**
**Table 1　Maximum radius of closed area with different precisions**

| $N$ | 闭区间半径最大值 | | |
|---|---|---|---|
| | $\varepsilon=0.1$ | $\varepsilon=0.05$ | $\varepsilon=0.01$ |
| 4 | 1.532 795 188 | 1.100 028 379 | 0.643 300 498 |
| 3 | 1.242 345 399 | 0.800 196 466 | 0.357 858 738 |
| 2 | 0.499 551 785 | 0.249 775 892 | 0.049 955 178 |

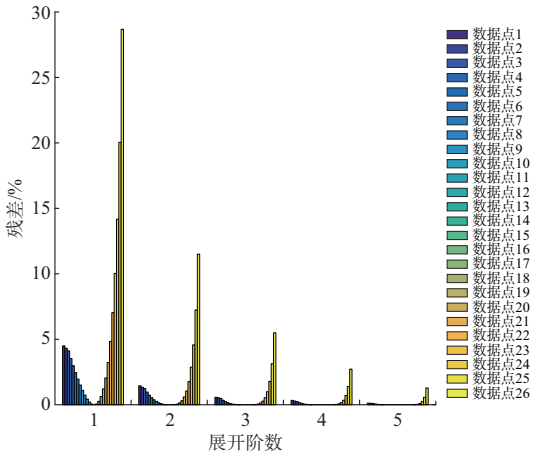


**图3　不同阶数下的SVSR边界残差**
**Fig. 3　SVSR boundary residues with different orders**

根据得到的各阶偏导数结果，可以得到SVSR边界上状态变量的信息。这里用状态变量形成的雅可比矩阵最小奇异值来表征结果的准确性，最小奇异值越小，表示结果越准确，计算结果见表2。

分析二维SVSR边界高精度拟合结果，发现展开阶数越高，边界拟合效果越好。SVSR边界的切平面预测与二次近似都是渐近数值方法低阶拟合的实例，仿真结果表明，基于渐近数值方法的SVSR边界高阶拟合具有更好的适用性和精确性。另一方面，SVSR边界拟合点越靠近初始点，拟合精度越

表2　状态变量形成的雅可比矩阵最小奇异值
Table 2　Minimum singular values of Jacobian matrix formed by state variables

| $P_{20}$ | 最小奇异值 | $P_{20}$ | 最小奇异值 |
|---|---|---|---|
| 0.24 | 0.023 734 23 | 1.05 | $2.289\,6\times10^{-14}$ |
| 0.33 | 0.017 670 65 | 1.14 | 0.000 280 299 |
| 0.42 | 0.012 861 70 | 1.23 | 0.000 578 512 |
| 0.51 | 0.009 075 08 | 1.32 | 0.000 895 004 |
| 0.60 | 0.006 130 57 | 1.41 | 0.001 229 815 |
| 0.69 | 0.003 885 91 | 1.50 | 0.001 582 507 |
| 0.78 | 0.002 227 16 | 1.59 | 0.001 951 931 |
| 0.87 | 0.001 061 92 | 1.68 | 0.002 335 890 |

高，表1数据也证实了此结论。

闭区间半径最大值$a_{max}$诠释了静态电压稳定边界计算精度与拟合范围的关系。大量数值仿真结果表明，精度满足要求时，$a_{max}$覆盖的范围可以保证拟合结果逼近真实边界。由表2可知，当取$\varepsilon=0.1$，展开到四阶时，$a_{max}=1.53$，已可覆盖全部边界。此时拟合最大残差为0.904%，精度满足要求。为了获取更高的精度，可以牺牲部分计算时间，将解曲线分段，选择3个拟合初始点，在3个初始点分别高阶展开，最后将分段展开的结果组合，即得到了更精确的结果。为获得更好的拟合效果，将初始点尽量分散，坐标分别为(3.899 08，0.150 00)，(3.062 61，1.050 00)，(1.536 18，2.100 00)。在分段闭区间上高阶展开，分段计算结果见附录A图A2，得到边界的最大残差为0.23%，其精度已满足工程要求。表3为对应这3个初始点展开的边界各阶导数值。

表3　各阶导数值
Table 3　Derivative values of different orders

| 自变量/因变量 | 一阶导数 | 二阶导数 | 三阶导数 | 四阶导数 | 五阶导数 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_{20}/Q_{20}$ | −0.808 | −0.109 | −0.022 20 | −0.015 9 | −0.001 93 |
| $P_{20}/Q_{20}$ | −1.082 | −0.217 | −0.007 02 | −0.030 0 | −0.014 40 |
| $P_{20}/Q_{20}$ | −2.111 | −1.200 | −1.219 00 | −1.572 0 | −2.281 00 |

基于本算例，将本文方法与文献[11]提出的搜索法以及逐点法进行时间尺度上的对比，结果见表4。

表4　二维边界算法时间对比
Table 4　Time comparison of two-dimension boundary algorithms

| 计算方法 | 时间/s | 最大残差/% |
|---|---|---|
| 逐点法 | 16.601 | 0 |
| 搜索法 | 2.718 | 0 |
| 本文方法 | 0.669 | 0.904 |

结果表明，本方法的精度不如逐点法与搜索法这2类精确算法，但其优势在于保证一定精度的同时大幅提高了计算时间，为将来的在线应用提供了探索的可能性。

针对发电机节点，选择发电机节点4和节点6进行分析。分别选取这2个节点的有功负荷作为横、纵坐标轴，构建二维SVSR边界，结果见附录A图A3。

## 2.2　三维注入功率空间

考虑节点20，21，22承担重负荷或功率波动较大的情形，针对这3个节点的有功功率构建SVSR边界，拟合初始点坐标为(2.738 73，0.98，1.3)结果见图4，各阶导数值见附录A表A1。

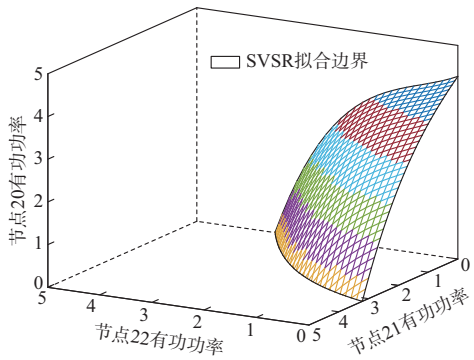


图4　基于渐近数值法的三维注入功率空间SVSR边界
Fig.4　Three-dimension SVSR boundary of injection power space based on asymptotic numerical method

逐点法采用直接法遍历边界上的SNB，平均每点计算耗时为0.724 6 s，为了减少对比的随机性，需采用尽量少的点，减少逐点法的时间。这里选择了50个分散在边界上的SNB，从初始点按指定的负荷增长方向用直接法找到对应的50个点，计直接法计算的总时间为逐点法计算时间。

表5结果表明，与拟合方法相比，逐点法的精度更高，但计算时间也更长。这是因为逐点法遍历边界的过程中涉及大量的迭代运算，而且要遍历边界全局也需要多次使用直接法，虽能得到准确的结果，但计算时间较长，不适于在线计算。另一方面，低阶拟合虽然计算速度快，但无法保证全局的精度。这是因为拟合法的本质是泰勒级数展开，在收敛半径内展开阶数越低，结果的误差就越大。而高阶拟合的结果精度满足要求，计算时间较之逐点法也有大幅度的减少，达到了预期的效果。逐点法构建边界属于精确性的方法，其搜索到的每一点都是准确位于边界上的；而渐近数值法属于拟合法，得到的结果存在误差，二者精度不同，故无法在同精度下进行比较。本方法提出的初衷就是为了在保证一定精度的前提下提升计算速度，为寻求边界在线计算提供更

多的可能性。

表5　不同算法的时间对比
Table 5　Time comparison of different algorithms

| 计算方法 | 时间/s | 最大残差/% |
|---|---|---|
| 逐点法 | 36.230 8 | 0 |
| 一阶拟合 | 0.781 8 | 44.72 |
| 二阶拟合 | 0.883 8 | 9.69 |
| 三阶拟合 | 1.672 8 | 2.70 |

基于得到的SVSR边界，计算1.4节的静态电压稳定指标$L_\lambda(\boldsymbol{u})$，对该区域在不同负荷增长方式下的静态电压稳定性进行分析。负荷增长方向用向量$\boldsymbol{\lambda}$表示，其中$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_{22},\lambda_{21},\lambda_{20}]$为注入功率空间内由基态运行点指向SVSR边界任一点的方向向量。先计算$d_2$，得到最危险的负荷增长方向，为(1.436 6，2.021 4，0.314 4)，当系统负荷以此方向增长时，到达SVSR边界的距离最短。再根据不同的负荷增长方向计算$d_1$，计算结果见表6。

表6　不同负荷增长方式下静态电压稳定指标
Table 6　Static voltage stability indices with different load growth patterns

| $\lambda_{22}:\lambda_{21}:\lambda_{20}$ | $d_1$ | $d_2$ | $L_\lambda(\boldsymbol{u})$ |
|---|---|---|---|
| 1:1:1 | 2.481 8 | 2.399 9 | 1.034 1 |
| 1:2:3 | 2.481 6 | 2.399 9 | 1.034 0 |
| 3:2:1 | 2.695 9 | 2.399 9 | 1.123 3 |
| 2:3:1 | 2.485 6 | 2.399 9 | 1.035 7 |

根据该指标定义，显然有$L_\lambda(\boldsymbol{u})\geqslant 1$，且其值越大，说明系统在该负荷增长方向上的裕度越大，系统的电压稳定性越强。计算结果表明，方式3的指标值相对较大，其对应的静态电压稳定水平也相对高。通过SVSR边界的高精度表达式，同样可得到各SNB处的状态变量，为调度人员提供了可靠的决策信息。

## 3　结语

本文利用渐近数值方法推导出了SVSR边界高阶偏导数的通式，实现了SVSR边界的高精度拟合。该方法通过复用已有矩阵的因子表，避免了原有方法的多次潮流计算，在保证精度的基础上提升了计算效率，降低了计算时间。基于IEEE 118节点系统，分别考虑了二维和三维SVSR边界的构建，针对二维结果进行了误差分析，证明了算法的有效性。利用得到的偏导数，可以得到SVSR边界上状态变量数值，为调度员提供了SVSR边界更加丰富的信息。算例证明，本文所提方法就时间而言与逐点搜索相比具有较大优势，所提指标计算速度也更快，具备在线应用的前景。

另一方面，本方法在构建多维边界时存在一定局限性，只能实现某点的高阶展开。如何利用得到的高阶导数信息快速准确地构建多维边界将是下一步的工作。

**附录见本刊网络版(http://www.aeps-info.com/aeps/ch/index.aspx)，扫英文摘要后二维码可以阅读网络全文。**

## 参考文献


[1] 肖湘宁，罗超，廖坤玉.新能源电力系统次同步振荡问题研究综述[J].电工技术学报，2017，32(6)：85-97.
XIAO Xiangning, LUO Chao, LIAO Kunyu. Review of the research on subsynchronous oscillation issues in electric power system with renewable energy sources[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2017, 32(6): 85-97.

[2] 程时杰.大规模储能技术在电力系统中的应用前景分析[J].电力系统自动化，2013，37(1)：3-8.
CHENG Shijie. An analysis of prospects for application of large-scale energy storage technology in power systems [J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(1): 3-8.

[3] 周孝信，陈树勇，鲁宗相.电网和电网技术发展的回顾与展望——试论三代电网[J].中国电机工程学报，2013，33(22)：1-11.
ZHOU Xiaoxin, CHEN Shuyong, LU Zongxiang. Review and prospect for power system development and related technologies: a concept of three-generation power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(22): 1-11.

[4] 朱星阳，刘文霞，张建华.考虑大规模风电并网的电力系统随机潮流[J].中国电机工程学报，2013，33(7)：77-85.
ZHU Xingyang, LIU Wenxia, ZHANG Jianhua. Probabilistic load flow method considering large-scale wind power integration [J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(7): 77-85.

[5] 丁明，王伟胜，王秀丽，等.大规模光伏发电对电力系统影响综述[J].中国电机工程学报，2014，34(1)：1-14.
DING Ming, WANG Weisheng, WANG Xiuli, et al. A review on the effect of large-scale PV generation on power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(1): 1-14.

[6] 薛禹胜，雷兴，薛峰，等.关于风电不确定性对电力系统影响的评述[J].中国电机工程学报，2014，34(29)：5029-5040.
XUE Yusheng, LEI Xing, XUE Feng, et al. A review on impacts of wind power uncertainties on power systems [J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(29): 5029-5040.

[7] 陈国平，李明节，许涛.特高压交直流电网系统保护及其关键技术[J].电力系统自动化，2018，42(22)：2-10.
CHEN Guoping, LI Mingjie, XU Tao. System protection and its key technologies of UHV AC and DC power grid [J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(22): 2-10.

[8] 罗亚洲，陈得治，李轶群，等.华北多特高压交直流强耦合大受端电网系统保护方案设计[J].电力系统自动化，2018，42(22)：11-18.
LUO Yazhou, CHEN Dezhi, LI Yiqun, et al. Design of system protection scheme for North China multi-UHV AC and DC strong coupling large receiving-end power grid[J]. Automation of

Electric Power Systems, 2018, 42(22): 11-18.
[9] 余贻鑫.电力系统安全域方法研究述评[J].天津大学学报,2008,41(6):635-646.
YU Yixin. Review of study on methodology of security regions of power system[J]. Journal of Tianjin University, 2008, 41(6): 635-646.
[10] WU F, TSAI Y K. Probabilistic dynamic security assessment of power systems-I: basic model[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1983, 30(3): 148-159.
[11] 姜涛,张明宇,李雪,等.静态电压稳定域局部边界的快速搜索新方法[J].中国电机工程学报,2018,38(14):4126-4137.
JIANG Tao, ZHANG Mingyu, LI Xue, et al. A novel algorithm to explore static voltage stability region boundary in power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2018, 38(14): 4126-4137.
[12] QIU Y W, WU H, ZHOU Y Z, et al. Global parametric polynomial approximation of static voltage stability region boundaries[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(3): 2362-2371.
[13] 韩琪,余贻鑫,李慧玲,等.电力系统注入空间静态电压稳定域边界的实用表达式[J].中国电机工程学报,2005,25(5):8-14.
HAN Qi, YU Yixin, LI Huiling, et al. A practical boundary expression of static voltage stability region in injection space of power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(5): 8-14.
[14] 王刚,梅生伟.静态电压稳定域边界的切平面分析[J].电力系统自动化,2007,31(11):6-11.
WANG Gang, MEI Shengwei. A tangent plane analysis of the static voltage stability region boundary[J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(11): 6-11.
[15] 王刚,张雪敏,梅生伟.静态电压稳定域边界的二次近似分析[J].中国电机工程学报,2008,28(19):30-35.
WANG Gang, ZHANG Xuemin, MEI Shengwei. Quadratic approximation analysis of static voltage stability region boundary[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(19): 30-35.
[16] COCHELIN B. A path-following technique via an asymptotic-numerical method[J]. Computers & Structures, 1994, 53(5): 1181-1192.
[17] COCHELIN B, DAMIL N, POTIER-FERRY M. The asymptotic-numerical method: an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics[J]. Revue Européenne Des Éléments Finis, 1994, 3(2): 281-297.
[18] 杨小煜,陈兴雷,刘赫川,等.电力系统分析综合程序连续潮流算法的改进[J].电网技术,2017,41(5):1554-1560.
YANG Xiaoyu, CHEN Xinglei, LIU Hechuan, et al. Improvements of the algorithms of continuation power flow for PSASP[J]. Power System Technology, 2017, 41(5): 1554-1560.
[19] AGGOUNE W, ZAHROUNI H, POTIER-FERRY M. Asymptotic numerical methods for unilateral contact[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 68(6): 605-631.
[20] YANG X Y, ZHOU X X, MA Y C, et al. Asymptotic numerical method for continuation power flow[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2012, 43(1): 670-679.

冯卓诚(1995—),男,通信作者,博士研究生,主要研究方向:电力系统分析与控制。E-mail:fzcrml@163.com

万凯遥(1992—),男,博士研究生,主要研究方向:电力系统分析与控制。E-mail:wankaiyao009@163.com。

姜　彤(1970—),男,教授,博士生导师,主要研究方向:电力系统分析与控制、大规模电力储能。E-mail:Jiangtong@ncepu.edu.cn

(编辑　孔丽蓓)

## High-order Fitting Method of Boundary for Static Voltage Stability Region Based on Asymptotic Numerical Method

*FENG Zhuocheng, WAN Kaiyao, JIANG Tong*
(State Key Laboratory of Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

**Abstract:** In order to calculate the static voltage stability boundary rapidly and precisely, an algorithm of fitting static voltage stability boundary based on asymptotic numerical method is proposed. By analyzing the equations formulated by the voltage collapse point, the general formula of the high-order partial derivatives of the static voltage stability boundary is obtained. Based on the asymptotic numerical method, the relationship between the fitting error and the boundary area is analyzed. The method avoids the multiple power flow calculations in traditional method, and has higher accuracy and lower time cost. On the other hand, the factor table of the existing coefficient matrices can be reused when calculating the high-order partial derivatives, which decreases the calculation burden. Finally, the related applications based on the method are presented. The cases based on IEEE 118 node system are established to verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** static voltage stability region; saddle node bifurcation; asymptotic numerical method; collapse point method